ECOLE POLYTECHNIQUE — OPTION M'

CONCOURS D'ADMISSION 1981

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 heures)

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel hermitien de dimension finie n sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes ; la norme de tout $x \in E$ est notée $\| x \|$.

Pour tout élément α de l'algèbre $\mathfrak{L}(E)$ des endomorphismes de E, $I(\alpha)$ et $N(\alpha)$ désignent respectivement l'image et le noyau de α, et α^* l'adjoint de α. Si $\beta \in \mathfrak{L}(E)$, le composé $\alpha \circ \beta$ sera noté $\alpha\beta$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, l'orthogonal $F^\perp$ de F est l'espace vectoriel des éléments de E orthogonaux à tous les éléments de F ; on rappelle que F est alors l'orthogonal de $F^\perp$ et que F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E. Si F_1 est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F, on note π_{F,F_1} l'endomorphisme de projection de E sur F parallèlement à F_1 ; dans le cas où $F_1 = F^\perp$, on dit que $\pi_{F,F^\perp}$ est le projecteur orthogonal sur F et on le note π_F.

I

1 - Pour tout $\alpha \in \mathfrak{L}(E)$, établir les égalités

$$I(\alpha)^\perp = N(\alpha^*), \quad I(\alpha^*)^\perp = N(\alpha), \quad N(\alpha^*\alpha) = N(\alpha), \quad I(\alpha\alpha^*) = I(\alpha).$$

2 - a - Si $x \in E$, montrer qu'il existe dans $I(\alpha^*)$ un élément y et un seul tel que $\alpha(y) = \pi_{I(\alpha)}(x)$.

b - Quel est l'ensemble des points $u \in E$ pour lesquels la fonction $u \longmapsto \| \alpha(u) - x \|$ atteint son minimum ? Comment caractériser y à l'aide de la norme parmi les points de cet ensemble ?

c - Pour α fixé dans $\mathfrak{L}(E)$, montrer que l'application $x \longmapsto y$ qui vient d'être définie est linéaire ; on la note $\alpha^\wedge$. *Dans toute la suite, on associera à tout* $\theta \in \mathfrak{L}(E)$ *l'endomorphisme* $\theta^\wedge$ *par le même processus.*

3 - On suppose, dans cette seule question, que $n = 3$ et que E est rapporté à une base orthonormée. Trouver numériquement, avec une présentation claire des calculs, la matrice relative à cette base de l'endomorphisme $\alpha^\wedge$ lorsque la matrice de α est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 - a - Si α est un endomorphisme injectif quelconque de E, comment peut-on exprimer $\alpha^\wedge$?

b - Montrer que pour tout endomorphisme α, injectif ou non, on a $\alpha\alpha^\wedge = \pi_{I(\alpha)}$. En déduire les égalités $\alpha\alpha^\wedge\alpha = \alpha$ et $\alpha^\wedge\alpha\alpha^\wedge = \alpha^\wedge$.

.../...

c - Si t est un nombre complexe non nul et si $\alpha \in \mathcal{L}(E)$, exprimer $(t\alpha)^\wedge$ en fonction de t et de $\alpha^\wedge$.

5 - On suppose, dans cette seule question, que α est hermitien. Exprimer $\alpha^\wedge$ à l'aide de vecteurs propres et de valeurs propres de α. Retrouver à l'aide de cette expression, dans ce cas particulier, le résultat de la question I.4.c .

6 - Soient φ un endomorphisme unitaire de E et α un endomorphisme quelconque de E. Etablir :

a - l'égalité $\varphi^* \alpha^\wedge = (\alpha \varphi)^\wedge$; b - l'égalité $\alpha^\wedge \varphi^* = (\varphi \alpha)^\wedge$.

II

1 - Pour tout $\alpha \in \mathcal{L}(E)$, établir les égalités

$$I(\alpha^\wedge) = I(\alpha^*) \qquad \text{et} \qquad N(\alpha^\wedge) = N(\alpha^*) .$$

2 - Comparer les dimensions de $I(\alpha) \cap I(\alpha^*)^\perp$ et de $I(\alpha^*) \cap I(\alpha)^\perp$; en déduire que α^2 et $(\alpha^\wedge)^2$ ont le même rang.

3 - a - Quelles sont les restrictions de l'endomorphisme $\alpha^\wedge \alpha$ aux sous-espaces vectoriels $I(\alpha^*)^\perp$ et $I(\alpha^*)$? Comparer $\alpha^\wedge \alpha$ et $\pi_{I(\alpha^*)}$.

b - Etablir l'égalité $(\alpha^\wedge)^\wedge = \alpha$.

4 - a - Soient F et G deux sous-espaces vectoriels quelconques de E. Comparer le projecteur orthogonal π_F à son adjoint. En posant $\xi = (\pi_F \alpha \pi_G)^\wedge$, en déduire les inclusions

$$I(\xi) \subset G \qquad \text{et} \qquad I(\xi^*) \subset F$$

et montrer que ξ vérifie l'égalité $\xi = \xi \alpha \xi$.

b - On suppose inversement que $\eta \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $\eta = \eta \alpha \eta$. Montrer que η est de la forme $\eta = (\pi_{F'} \alpha \pi_{G'})^\wedge$ où F' et G' sont des sous-espaces vectoriels de E. En déduire que tout endomorphisme de projection π_{F,F_1} peut s'écrire sous la forme

$$\pi_{F,F_1} = (\pi_{F_1^\perp} \pi_F)^\wedge .$$

5 - L'endomorphisme nul étant noté 0, on suppose que α et β sont des endomorphismes de E tels que $\alpha^* \beta = \beta \alpha^* = 0$.

a - Montrer que $I(\alpha^*) + I(\beta^*) = I(\alpha^* + \beta^*)$.

b - En déduire l'égalité $\alpha^\wedge + \beta^\wedge = (\alpha + \beta)^\wedge$.

XXXXX

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail